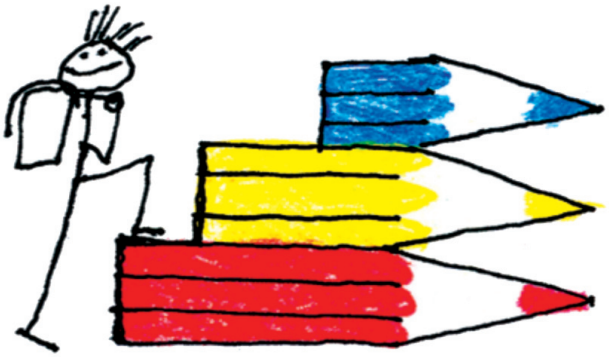
Handreichungen des Programms *SINUS an Grundschulen*

Mathematisches Argumentieren in der Grundschule fördern

Angela Bezold



SINUS an Grundschulen

Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts

Mathe

Mathematik

Inhaltsverzeichnis

1 Bausteine des Argumentierens 3
2 Entwicklung der Bausteine des Argumentierens im Unterricht 5
3 Argumentieren und Sprache 9
4 Argumentieren und Darstellen 10
5 Weitere Aufgaben mit Argumentationspotential 11
6 Beurteilung von Argumentationen 18
Literaturhinweise 20
Anhang 22

Impressum

Angela Bezold
Mathematisches Argumentieren in der Grundschule fördern – was Lehrkräfte dazu beitragen können

Publikation des Programms *SINUS an Grundschulen*
Programmträger: Leibniz-Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften und Mathematik (IPN)
an der Universität Kiel
Olshausenstraße 62
24098 Kiel
www.sinus-an-grundschulen.de
© IPN, März 2010

Projektleitung: Prof. Dr. Olaf Köller
Projektkoordination: Dr. Claudia Fischer
Redaktion u. Realisation dieser Publikation:
Brigitte Dedekind, Tanja Achenbach
Kontaktadresse: info@sinus-grundschule.de

ISBN: 978-3-89088-204-8

Nutzungsbedingungen

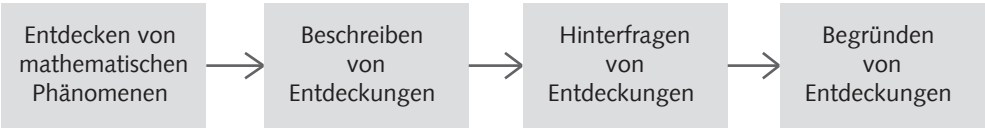
Das Kieler Leibniz-Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften und Mathematik (IPN) gewährt als Träger der SINUS-Programme ein nicht exklusives, nicht übertragbares, persönliches und beschränktes Recht auf Nutzung dieses Dokuments. Dieses Dokument ist ausschließlich für den persönlichen, nicht-kommerziellen Gebrauch bestimmt. Die Nutzung stellt keine Übertragung des Eigentumsrechts an diesem Dokument dar und gilt vorbehaltlich der folgenden Einschränkungen: Auf sämtlichen Kopien dieses Dokuments müssen alle Urheberrechtshinweise und sonstigen Hinweise auf gesetzlichen Schutz beibehalten werden. Sie dürfen dieses Dokument nicht in irgendeiner Weise abändern, noch dürfen Sie dieses Dokument für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, vertreiben oder anderweitig nutzen. Mit der Verwendung dieses Dokuments erkennen Sie die Nutzungsbedingungen an.

Angela Bezold

Mathematisches Argumentieren in der Grundschule fördern – was Lehrkräfte dazu beitragen können

1 Bausteine des Argumentierens

In einem »forschenden« Mathematikunterricht entdecken Schülerinnen und Schüler Muster und Strukturen, Eigenschaften und Beziehungen. Sie beschreiben ihre Entdeckungen, ziehen Schlussfolgerungen und begründen. Hierbei handelt es sich um argumentative Aktivitäten, die im Mathematikunterricht untrennbar mit dem Verstehen von mathematischen Sachverhalten verbunden sind.
Die zentrale Bedeutung des Argumentierens im Mathematikunterricht der Primarstufe spiegelt sich heute insbesondere in den Bildungsstandards (KMK 2005) wider. Argumentieren bedeutet hier »mathematische Aussagen hinterfragen und auf Korrektheit prüfen, mathematische Zusammenhänge erkennen und Vermutungen entwickeln, Begründungen suchen und nachvollziehen« (ebd., S. 8).
Die folgenden vier Bausteine – man könnte diese auch als grundschulspezifische Komponenten des Argumentierens verstehen – stellen zentrale argumentative Aktivitäten im Mathematikunterricht dar. Ausgangspunkt der Überlegungen ist die Intention, im Mathematikunterricht die Forscher- und Entdeckerhaltung der Kinder anzusprechen (vgl. Modul G2).



Baustein 1: Entdecken von mathematischen Phänomenen
Bevor Aussagen über mathematische Phänomene – Besonderheiten wie beispielsweise Zahleigenschaften, Gesetzmäßigkeiten, Beziehungen, Spezialfälle – aufgestellt werden können, müssen zunächst mathematische Sachverhalte entdeckt werden. Die Bewältigung dieses Schrittes erfordert auch Kompetenzen des Problemlösens und der Kreativität. Die Fähigkeit, relevante und irrelevante Informationen unterscheiden zu können, spielt eine bedeutende Rolle. Auch die Kenntnis von spezifischen mathematischen Begriffen, Eigenschaften und Beziehungen stellt u. U. eine notwendige Voraussetzung dar.

Baustein 2: Beschreiben von Entdeckungen (Vermutungen)
Sobald Vermutungen über mathematische Auffälligkeiten bzw. Strukturen sprachlich[1] geäußert oder dargestellt[2] werden, beginnt die Argumentationskette im eigentlichen Sinn. Diese Vermutungen sollten auf einer gewissen Grundlage – in der Grundschule in der Regel durch Entdeckungen an Einzelbeispielen – getroffen werden.

$1 + 3 = 4 = 2^2$
$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$
$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$
$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$

Ob eine Entdeckung oder ein Muster letztendlich als erwähnenswert, als faszinierend oder sogar als »schön« (siehe Beispiel) angesehen wird, ist auch eine subjektive Entscheidung. Dies verlangt einen gewissen Spielraum für den Umgang mit Entdeckungen von Kindern.

Baustein 3: Hinterfragen von Entdeckungen
Das Hinterfragen von mathematischen Aussagen wird angeregt, wenn eine Begründungsnotwendigkeit erkannt wird (»Warum stimmt das?«) oder mathematische Aussagen bewusst zunächst als Vermutung betrachtet werden (»Stimmt das wirklich immer?«). Die Erfahrungen zeigen, dass Kinder nicht von sich aus das Bedürfnis haben, Begründungen zu formulieren. Ihnen dieses Bedürfnis zu vermitteln, ist nicht einfach. (Krauthausen 2001). In der Regel wird das Hinterfragen und Begründen zunächst von außen – durch die Lehrkraft bzw. adäquate Arbeitsaufträge – initiiert. Langfristig gesehen soll sich im Unterricht eine »Kultur des Sich-Fragens« entwickeln, in der Lernende es zunehmend als selbstverständlich empfinden, mathematische Aussagen zu begründen (vgl. ebd., S. 104).

Baustein 4: Begründen von Entdeckungen
Die Tätigkeit des Begründens zielt darauf ab, den Wahrheitsgehalt der gewonnenen Vermutungen zu untersuchen. In der Grundschule geht es zunächst darum, Vermutungen an weiteren (repräsentativen) Einzelbeispielen positiv zu testen und bei Anwendung nichts Widersprüchliches zu entdecken. Dies erfordert auch eine Einordnung in das (bekannte) mathematische Gesamtgefüge.
Eine mathematische Entdeckung nicht nur zu formulieren, sondern auch zu begründen, stellt einen hohen Anspruch in der Grundschule dar. Eine aktuelle Studie zeigte, dass circa ein Drittel der Grundschüler einer 3. Jahrgangsstufe (bei entsprechender Förderung) in der Lage sind, nicht nur mathematische Besonderheiten zu entdecken, sondern diese auch zu begründen (Bezold 2009). Vor diesem Hintergrund ist es wichtig, den

1 In Abgrenzung zu diesem Argumentationsverständnis existiert daneben ein Argumentieren, bei dem Vermutungen und Begründungen hierfür nicht explizit sprachlich geäußert werden. Allein durch die Lösung einer Aufgabe schließt man auf Argumentationsvorgänge, die sich »im Verborgenen« abgespielt haben (könnten). Nach Blum et al. hat eine Aufgabe »auch dann Argumentationspotential, wenn ein Schüler bei deren Bearbeitung für sich selbst, also in einem intern ablaufenden mentalen Prozess, ein Lösungsverfahren oder ein Ergebnis erklären, rechtfertigen und überprüfen muss« (2006, S. 36). Argumentieren in diesem Sinne wird als »inneres Argumentieren« bezeichnet.
2 Es besteht auch die Möglichkeit, mit nicht-sprachlichen Mitteln Entdeckungen zu beschreiben.

Argumentationsbegriff weiter zu fassen und nicht allein auf den vierten Baustein – das Begründen – einzuschränken. Dies erfordert insbesondere eine Würdigung des zweiten Bausteins und ein behutsames Heranführen an Begründungen. Dadurch eröffnen sich zahlreiche Möglichkeiten zur natürlichen Differenzierung hinsichtlich der Förderung des Argumentierens.
Im Sinne von Freudenthals Plädoyer für eine Sichtweise der Mathematik als Tätigkeit und Geisteshaltung müssen Entdeckungen stets vom Kind selbst erlebt werden (vgl. Steinweg 2001, S. 24). Freudenthal formuliert drastisch: *»Einem Kind ein Geheimnis zu verraten, das es selber entdecken kann, ist schlechte Didaktik, es ist ein Verbrechen.«* (1973, S. 389)

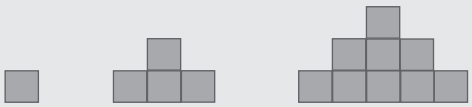
Anregung 1
a) Nennen Sie – falls möglich – Beispiele für Argumentationen von Kindern im Grundschulalter aus dem Alltag.
b) Suchen Sie in Schulbüchern Argumentationsanlässe.

2 Entwicklung der Bausteine des Argumentierens im Unterricht

Wie können Lehrkräfte ihre Schülerinnen und Schüler beim Entwickeln der eben genannten vier Bausteine unterstützen? Hierfür werden nun am Beispiel der Doppeltreppe[3] Möglichkeiten der Umsetzung aufgezeigt.

Aufgabe: Doppeltreppe

Setzt die Folge fort!



Welche Muster und Strukturen entdeckt ihr? Warum ist das so?

Eine methodische Möglichkeit wie Lehrkräfte das Argumentieren fördern können, stellt das so genannte Vier-Phasen-Unterrichtsmodell (Bezold 2009) dar, das je nach klassen- oder aufgabenspezifischen Bedingungen variiert werden kann.
In der *Initiierungsphase* (Phase 1) wird das Verständnis der Forscheraufgabe geprüft. Die Kinder setzen die Folge aktiv mit Einheitswürfeln fort und zählen die Anzahl der Würfel der folgenden Doppeltreppe ab. Dabei werden Fachbegriffe eingeführt bzw. in Erinnerung gerufen, die den Schülerinnen und Schülern das Argumentieren über die entdeckten Besonderheiten später erleichtern sollen (Anzahl der Würfel, Höhe der Doppeltreppe).
In der *Phase des individuellen Forschens* (Phase 2) erhalten die Schülerinnen und Schüler Gelegenheit, sich vollkommen selbstständig und auf individuellen Wegen mit den Doppeltreppen auseinanderzusetzen. Die Kinder bauen Doppeltreppen, erforschen die Bauweise, bestimmen jeweils die Anzahl der Würfel und entdecken im Tun Besonderheiten.

3 Die Aufgabe und einzelne Ideen wurden aus Hengartner et al. entnommen. Sie finden dort weitere interessante Anregungen für Doppeltreppen und Aufgabenvariationen (2006, S. 117-121).

Entdecken von mathematischen Phänomenen

Um den »Zahlenblick« auf die Anzahlen der Doppeltreppe zu lenken, werden diese in einer Tabelle[4] auf einem Arbeitsblatt[5] notiert.

Höhe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Anzahl	1	4								

Sowohl die Einzelbetrachtung der Anzahlen einer Doppeltreppe als auch der Vergleich der Anzahlen kann zu erstaunlichen Entdeckungen führen:

- Die Anzahlen der Würfel einer Doppeltreppe sind Quadratzahlen.
- Die Abstände von einer zur nächsten Doppeltreppe ergeben die aufsteigende Folge ungerader Zahlen (+3, +5, +7, …)

Eine Unterscheidung von relevanten und irrelevanten Informationen ist für Kinder nicht immer leicht, so dass u. U. Anstöße von außen (Forschertipps) erforderlich sind (vgl. Meyer 2007, S. 20). Die Forschertipps versuchen die Aufmerksamkeit der Schülerinnen und Schüler auf besondere Zahleigenschaften sowie Zahlbeziehungen zu lenken. Das Vergleichen (Erkennen von Gemeinsamkeiten oder Unterschieden) und Ordnen von Zahlen spielt dabei eine bedeutende Rolle. Diese Forschertipps werden den Kindern sukzessive – je nach Bedarf und nicht zu früh – gegeben.

Mögliche Forschertipps:

- Welche Besonderheit weisen die Anzahlen der Würfel auf? (Die Tabelle hilft.)
- Vergleiche immer zwei aufeinander folgende Doppeltreppen! Was fällt dir auf?

Beschreiben von Entdeckungen

Die sprachlichen Fähigkeiten können eine nicht zu unterschätzende Hürde für das Argumentieren darstellen. Nicht allen Kindern fällt es (anfangs) leicht, ihre Entdeckungen verständlich und eindeutig schriftlich oder mündlich zu formulieren[6].

Nach einer intensiven Erforschung der Doppeltreppen entdeckte Sophie (siehe Schülerdokument) die besonderen Eigenschaften der Doppeltreppen und notierte diese in schriftlicher Form. Es gelang ihr, auch die funktionalen Zusammenhänge der Höhe und der Anzahl einer Doppeltreppe zu erkennen.

4 Kinder mit »Forschererfahrung« finden diese oder andere geeignete Darstellungsformen u. U. selbstständig.

5 Der Unterschied der dreidimensionalen Darstellung mit Einheitswürfeln und der zweidimensionalen Darstellung auf dem Arbeitsblatt sollte thematisiert werden.

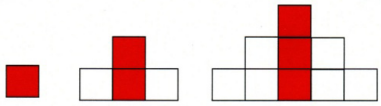
6 Auf diese Thematik wird im Kapitel 3 eingegangen.

Forschen	Sophie	

Wir forschen mit Doppeltreppen

1. Baue Doppeltreppen und fülle die Tabelle aus!

Vergleiche die Ergebnisse in der Tabelle!



Höhe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Anzahl	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196
		3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27

Platz für Zeichnungen, Rechenwege und Entdeckungen

Die Anzahl ist immer eine Quadratzahl. Man muss die Höhe mal die Höhe nehmen.

Nach der Phase des individuellen Forschens treffen sich drei bis vier Kinder zum gemeinsamen Forschen im so genannten Forschertreff (Phase 3). Die Schülerinnen und Schüler stellen sich ihre Entdeckungen, Ideen und gegebenenfalls Begründungen gegenseitig vor. Gemeinsam diskutieren sie über ihre individuellen Erkenntnisse, d. h., sie vergleichen diese und überprüfen sie auf ihre Richtigkeit.
Sophie notierte ihre neuen Erkenntnisse aus dem Forschertreff:

3. Tauscht eure Entdeckungen aus und forscht gemeinsam weiter!

a) Wie wächst die Anzahl der Würfel? Welche Regel erkennt ihr?

b) Beschreibt eure Entdeckungen!

Wenn man die Würfel bei den Doppeltreppen verändert, entstehen Quadrate. Die Abstände sind immer ungerade Zahlen.

Auch Konstantin entdeckte durch den Austausch im Forschertreff die Beziehung zwischen den Anzahlen der Würfel und den Höhen.

Die Zahlen sind Quadratzahlen Die Anzahl ist immer eine Quadratzahl. Die Anzahl kann man immer durch die Höhe teilen und man kann die Höhe auch malnehmen. Am Anfang zwischen Höhe 1 und 2 sind 3 Zahlen.

Hinterfragen von Entdeckungen

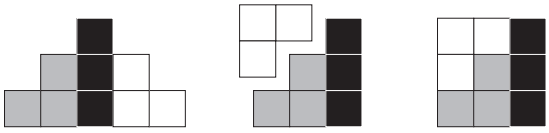
Die Entdeckung, dass jede Anzahl der Würfel einer Doppeltreppe eine Quadratzahl ergibt, kann für Kinder so faszinierend sein, dass sie sich aus eigenem Antrieb fragen, warum dies so ist bzw. ob ihre Entdeckung auch für alle weiteren Fälle gilt.

Begründen von Entdeckungen

Für die Entwicklung einer Begründung stellt ein spezifisches Vorwissen über Quadratzahlen eine notwendige Voraussetzung dar: Nur eine Quadratzahl lässt sich als Quadrat darstellen. Es geht also darum, jede mit Würfeln gebaute (liegende) Doppeltreppe in ein Quadrat zu verwandeln. Diese Aufgabe selbstständig zu erkennen und zu lösen ist wohl besonders begabten Schülerinnen und Schülern vorbehalten.
Weitere Forschertipps fordern auch andere Kinder auf, ihre Entdeckungen zu hinterfragen und helfen, Begründungsideen zu finden.

- Was weißt du über Quadratzahlen?
- Kannst du eine Doppeltreppe in ein Quadrat verwandeln?

Nach dieser intensiven mathematischen Auseinandersetzung – individuell und im Team – könnte sich noch eine *Präsentationsphase* (Phase 4) anschließen. Jede Gruppe trägt ihre Ergebnisse in der Klasse vor; die Vorträge werden verglichen und hinterfragt. Im Falle der Doppeltreppen bietet sich in dieser Phase insbesondere eine vertiefende Auseinandersetzung mit Baustein 3 und 4 an.
Die folgende zweidimensionale Darstellung liefert eine Begründung für die Entdeckung der »Quadratzahl«. Auch ohne Versprachlichung erfolgt eine Erklärung.



Bei der obigen Darstellung gelang es, ein »Muster« zu finden, das die Eigenschaften der Doppeltreppe bzw. der Quadratzahl offenbart. Die Doppeltreppe kann durch eine Drehung der weißen Stufen und eine anschießende Verschiebung in ein Quadrat übergeführt werden.
Bei Baustein 4 muss eine Begründung für den Einzelfall von einer allgemein gültigen Begründung unterschieden werden. Die Beschreibung und Begründung von mathematischen Phänomenen für den Einzelfall können sich als sehr schlüssig erweisen. Oftmals fehlt nur ein »kleiner Schritt« für eine Verallgemeinerung. Das »Muster« der Doppeltreppe fungiert als Stellvertreter für jedes beliebige Element der Doppeltreppe. Auf diese Weise vollzieht sich die Ablösung vom Einzelfall. Müller und Wittmann sprechen in diesem Zusammenhang von inhaltlich-anschaulichen Beweisen (so genannten operativen Beweisen)[7] (Müller et al. 2004, S. 38).

Anregung 2
a) Sammeln Sie Erfahrungen mit dem Vier-Phasen-Unterrichtsmodell.
b) Beobachten Sie die Wirkung Ihrer Forschertipps.
b) Modifizieren Sie dieses Modell gegebenenfalls für Ihre klassenspezifischen Bedingungen.

7 Interessierte Leser finden nähere Erläuterungen und ausführliche Beispiele für operative Beweise bei Müller et al. (2004) und Bezold (2009, S. 76-81; S. 92-99).

3 Argumentieren und Sprache

Die sprachlichen Fähigkeiten der Schülerinnen und Schüler beeinflussen die Kommunikation über erschlossene Eigenschaften, Beziehungen und Strukturen. Sowohl im mündlichen als auch im schriftlichen Bereich wird der Anspruch auf Verständlichkeit der Äußerungen erhoben, jedoch sollte das »Gemeinte« in schriftlicher Form so eindeutig und klar (in einer gewissen Norm) dargestellt werden, dass es nachvollziehbar ist. Diesem Anspruch können Grundschulkinder – und auch ältere Schülerinnen und Schüler (vgl. Malle 2002) – teilweise (noch) nicht genügen. In diesen Fällen obliegt es der Lehrkraft, in Abhängigkeit des Leistungsvermögens eines Kindes eine Balance zwischen einer Akzeptanz von »undeutlichen« Aussagen und Hinweisen auf diese zu finden. Wichtig ist hierbei, dass bei der Wertschätzung bzw. Beurteilung einer mathematischen Argumentation die sprachliche Gewandtheit möglichst ausgeblendet wird; entscheidend ist die Verständlichkeit, (entwicklungsgemäße) Klarheit und der Wahrheitsgehalt der Aussage. In diesem Zusammenhang ist Folgendes zu bedenken: *»Ein Verständnis für Präzision lässt sich nur in einem langfristig angelegten Prozess des Präzisierens entwickeln, nicht durch formale Setzungen von außen.«* (Müller et al. 2004, S. 13)

Als hilfreich für Kinder mit Formulierungsproblemen können sich Sprachmuster erweisen. Sie können u. U. helfen, sprachliche Barrieren zu überwinden.

Mögliche Sprachmuster
»Ich habe herausgefunden, dass …« »Ich habe entdeckt, dass …«
»Das ist so, weil …«
»Wenn …, dann …«
»Wenn ich … verändere, dann …«

Auch die Forschertipps, die bei den Doppeltreppen bereits angesprochen wurden, geben indirekt Formulierungshilfen und können dazu beitragen, die Gedanken zu strukturieren.

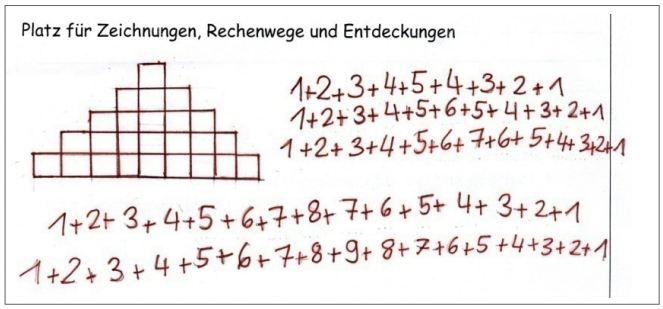
Mögliche Forschertipps
Vergleiche die »besonderen« Zahlen.
Welche Gemeinsamkeiten erkennst du?
Welche Unterschiede erkennst du?
Ordne deine Ergebnisse. (Tipp: Tabelle) Welche Besonderheiten fallen dir auf?
Was passiert, wenn du … veränderst?
Treffen deine Entdeckungen immer zu?
Welche Lösungen sind möglich bzw. nicht möglich? Begründe.

Es lässt es sich nicht leugnen, dass es einigen Kindern im Grundschulalter (insbesondere beim Schreiben) noch schwer fällt, sprachliche Barrieren zu überwinden, ihre Gedanken zu ordnen und selbständig zu formulieren. Ein Blick in die Praxis lässt jedoch erkennen, dass Kinder, die von Anfang an motiviert werden, sich im Mathematikunterricht schriftlich auszudrücken, weitaus weniger Unsicherheiten zeigen.

4 Argumentieren und Darstellen

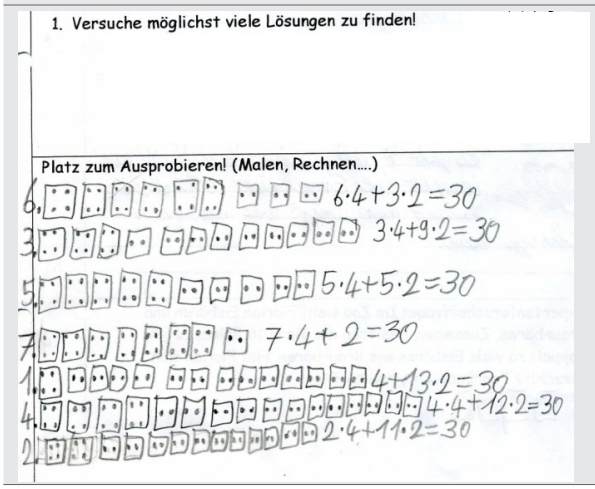
Auch mit nicht-sprachlichen Mitteln vollziehen sich Argumentationen bzw. können Entdeckungen und Begründungen dargestellt werden. Hierfür eignen sich u. a. geometrische Muster (z. B. Punkte- oder Kästchenmuster), freie Zeichnungen und Tabellen, sowie Aufgaben oder Gleichungen. Mit Hilfe dieser Darstellungen können nicht nur entdeckte Zusammenhänge veranschaulicht, sondern auch weitere mathematische Phänomene gefunden oder überprüft werden. Darüber hinaus können Darstellungen die eigenen Argumentationen schärfen und dabei helfen, mit den Mitschülern in einen kommunikativen Austausch zu treten.

Muster und Rechenaufgaben
Antonia stellt ihre Entdeckungen zu den Doppeltreppen in Form eines Musters und den dazugehörigen Additionsaufgaben dar. Die Darstellung ist selbsterklärend; zur Ablösung von den Einzelfällen fehlt nur noch ein kleiner Schritt.

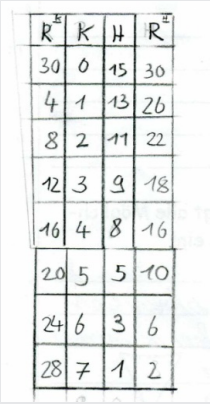


Freie Zeichnungen und Tabellen
Skizzen unterstützen bei der Lösungsfindung und können Entdeckungen strukturieren. Tabellen helfen mögliche Lösungen zu finden und unmögliche Lösungen auszuschließen. Sie stellen eine Argumentation direkt dar oder lassen indirekt darauf schließen.

Aufgabe
Auf dem Bauernhof stehen Kühe und Hühner im Stall. Der Bauer zählt 30 Beine.
Wie viele Kühe und wie viele Hühner könnten es sein?
Versuche möglichst viele Lösungen zu finden.
Versuche zu begründen, warum es nicht mehr Lösungen gibt.



Tom nummeriert nach der Lösungsfindung seine gefundenen Möglichkeiten und begründet durch diese Systematik die Vollständigkeit seiner Lösungen.



R	K	H	R
30	0	15	30
4	1	13	26
8	2	11	22
12	3	9	18
16	4	8	16
20	5	5	10
24	6	3	6
28	7	1	2

Ann-Katrin stellt ihre Lösungen geordnet in einer Tabelle dar und weist damit ebenfalls die Vollständigkeit ihrer Ergebnisse nach. Ein Blick auf die Spalte der Hühner lässt erkennen, dass nur ungerade Zahlen dieser Tierart auftreten. Die Frage »Warum ist das so?« könnte sich anschließen.

Anregung 3
Sammeln Sie Argumentationen nicht-sprachlicher Art und interpretieren Sie diese.

5 Weitere Aufgaben mit Argumentationspotential

Es wurden bereits »schöne Aufgaben« – beispielsweise die Doppeltreppe – vorgestellt, die sich zur Förderung des Argumentierens eignen. Im Mathematikunterricht gibt es unzählige weitere »kleine und große Anlässe« für das Argumentieren; wichtig ist hierbei, diese auch ab der ersten Jahrgangsstufe bewusst zu nutzen und gezielt zu thematisieren. So bieten auch die elementarsten arithmetischen Aussagen (3 < 5) Argumentationsanlässe. Diskussionen über Rechenstrategien könnten beispielsweise in Form eines Austausches im Team (»Mathekonferenzen«) stattfinden. Die Kinder entscheiden sich anschließend individuell für ihren Rechenweg und begründen ihre Wahl mündlich oder schriftlich. Schriftliche Dokumente fordern die Kinder u. U. auf, sich noch genauer mit ihren Erklärungen und Begründungen auseinander zu setzen. Darüber hinaus geben Schülerdokumente den Lehrkräften Aufschluss über Fortschritte oder auch Schwierigkeiten. Sie finden diese Anregungen nun nochmals in Tabellenform[8].

Argumentationsanlässe	mögliche Fragen bzw. Aufträge	Beispiele
elementare arithmetische Aussagen	»Wenn du eine gerade und eine ungerade Zahl zusammenzählst, erhältst du eine ungerade Zahl. Stimmt das? Begründe!«	4 + 5 = 9 5 + 6 = 11
Rechenwege / vorteilhaftes Rechnen	»Warum hast du das so gerechnet?« »Was fällt dir auf?« »Geht das auch noch anders?«	6 + 5 = 11 6 + 6 – 1 = 11 5 + 5 + 1 = 11
Rechengesetze	»Wer hat Recht?« »Gilt das immer?« »Warum ist das so?«	Marie: 3 + 5 = 8 Paul: 5 + 3 = 8 Kommutativgesetz

8 Beispiele für weitere Argumentationsanlässe finden Sie in Tabellenform im Anhang. Eigene Beispiele können in dieser Tabelle nach Belieben ergänzt werden.

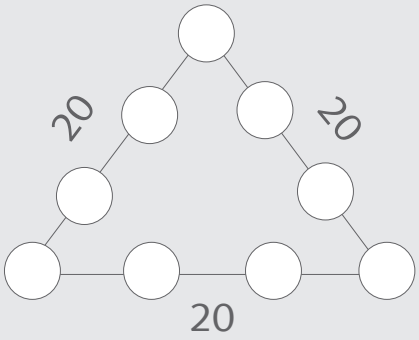
Im Folgenden wird nun eine kleine Auswahl von Aufgaben, die nach drei Aspekten ausgewählt wurden, vorgestellt. Diese Aspekte können als Entscheidungshilfe für weitere Aufgaben dienen:

- Die Aufgaben halten interessante mathematische Entdeckungen bereit und initiieren ein Hinterfragen und Begründen der Entdeckungen; der natürliche Forscherdrang des Kindes wird angesprochen.
- Alle Aufgaben ermöglichen eine natürliche innere Differenzierung hinsichtlich der Förderung des Argumentierens. Dies bedeutet, dass die Aufgaben sowohl Entdeckungen als auch Begründungen auf unterschiedlichen Niveaustufen ermöglichen[9].
- Darüber hinaus sind die Beispielaufgaben so konzipiert, dass sie inhaltsbezogene (Steigerung der Rechenfertigkeiten) *und* argumentative Kompetenzen fördern. Dies erscheint für ein sinnvolles Zeit-Management in der Praxis wichtig bzw. unverzichtbar. Dabei soll gleichzeitig vermieden werden, dass rechenschwache Schülerinnen und Schüler zu viel Energie aufbringen müssen, um die Rechenergebnisse zu finden.

Die in der Literatur in jüngster Zeit häufig verwendeten Begriffe »Gute Aufgaben« oder »Forscheraufgaben« spiegeln die Überlegungen wider[10].
Bei den ersten zwei Beispielen handelt es sich um *lösbare,* bei den weiteren Beispielen um *unlösbare* Aufgabenstellungen, deren Wert zur Förderung des Argumentierens noch herausgestellt wird.

Beispiel 1: Zahlendreiecke
Zahlendreiecke gehören zu den substanziellen Übungsformaten. Substanzielle Übungsformate »stellen Aufgabenkomplexe dar, bei denen nach festgelegten Vorschriften mehrere Operationen durchzuführen sind« (Verboom 2004, S. 8). Bei einer Veränderung des Zahlenmaterials entstehen neue – oftmals überraschende – Ergebnisse. Die besonderen Zahleigenschaften und Zahlbeziehungen laden zum Entdecken und Begründen ein. Gleichzeitig werden Rechenfähigkeiten und -fertigkeiten trainiert.

Aufgabe
Legt die Ziffernkarten von 1 bis 9 so in die Kreise, dass immer die vier Zahlen, die zu einer Dreiecksseite gehören (Außenzahlen), zusammen die Summe 20 ergeben!



9 »Die Aufgaben sollten für alle Kinder – auch für die langsamsten unter ihnen – einen Einstieg anbieten, sodann aber Bearbeitungsmöglichkeiten für alle Fähigkeitsstufen – auch für jene der Hochbegabten – öffnen.« (Hengartner 2006, S. 11)
10 Weitere »Gute Aufgaben« bzw. »Forscheraufgaben« finden Sie bei Walther 2004 (Modul G 1), Selter 2004 (Modul G 2) und Ruwisch u. Peter-Koop 2003.

Anregung 4
a) Lösen Sie das Zahlendreieck. Finden Sie noch weitere mögliche Lösungen?
b) Welche besonderen Eigenschaften des Zahlendreiecks können
- bei einer möglichen Lösung
- beim Vergleich verschiedener Lösungen

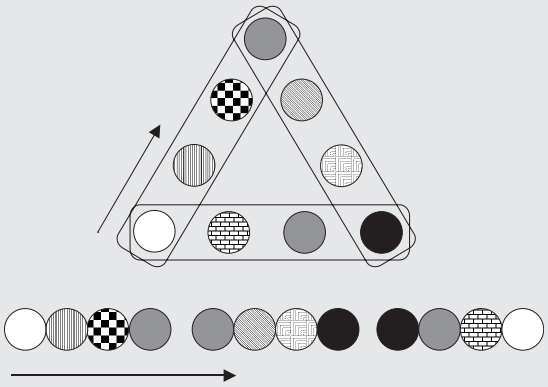
entdeckt, hinterfragt und begründet werden?

In Einzel- oder Partnerarbeit legen die Schülerinnen und Schüler die Zahlenkärtchen 1 bis 9 in die Kreise. Die Lösung dieser Aufgabenstellung erfordert zunächst das Lösen von zahlreichen Additionsaufgaben (Förderung inhaltsbezogener Kompetenzen). Die Kinder erkennen in der Regel bald, dass ein rein »planloses Vorgehen« zu keiner möglichen Lösung führt. Es geht also darum, besondere Eigenschaften des Zahlendreiecks zu entdecken und daraus eine geeignete Lösungsstrategie zu entwickeln (Baustein 1).[11]
Mit dem Partner (oder auch in der Gruppe) werden die Entdeckungen und mögliche Strategien ausgetauscht (Baustein 2). Lisa schildert im Forschertreff ihre Strategie wie folgt: *»Ich habe erst die kleinen Zahlen als Eckzahlen genommen, das ging aber nicht. Dann habe ich nur große Zahlen genommen, das hat auch nicht geklappt. Also dürfen alle Eckzahlen zusammen nicht so groß sein.«*
Tom äußert sich auf diese Weise: *»Wenn ich die Innenzahlen in einer Reihe vertausche, passiert eigentlich gar nichts, erst wenn ich die Eckzahlen wechsle.«*
Erfahrungen aus der Praxis zeigten, dass zumindest einige Kinder von sich aus Begründungen für die Strategien der Mitschüler einforderten (Baustein 3 und 4), z. B. »Warum geht es mit nur kleinen Eckzahlen nicht?«
Nachdem einige Partner bzw. Gruppen eine mögliche Lösung gefunden haben, erfolgt ein Austausch im Klassenverband über entdeckte Strategien und Zahleigenschaften.
Mögliche Entdeckungen liefern Anlässe unterschiedlichen Niveaus zum Argumentieren, d. h. Anlässe zum Beschreiben und Begründen dieser Entdeckungen. Forscherfragen, die sehr offen oder gezielt gestellt werden, können Begründungsanlässe geben.
- Was fällt dir (allgemein) auf? Warum ist das so? (offene Fragestellung)
- Wie verändert sich die Summe der Außenzahlen, wenn du eine Eckzahl um 1, 2, … erhöhst? Was passiert, wenn du zwei Innenzahlen vertauschst? Welche Gemeinsamkeiten weisen die verschiedenen Lösungen auf? Hast du eine Idee, warum das so ist? (gezielte Fragestellung)

Bei den Zahlendreiecken kommt den Eckzahlen eine besondere Bedeutung zu, da diese jeweils in die Summe zweier Außenzahlen eingehen. Auf der Suche nach möglichen Lösungen erkennen die Kinder, dass sich Veränderungen der Eckzahlen oder der übrigen Zahlen in unterschiedlicher Weise auf die Außenzahlen auswirken.
Eine Auseinandersetzung mit *verschiedenen* Lösungen setzt nun sehr anspruchsvolle mathematische Denkweisen in Gang, die sicherlich nur besonders begabte Schülerinnen und Schüler bzw. Kinder aus höheren Jahrgangsstufen entwickeln können. Beim Vergleich möglicher Lösungen fällt eine Gemeinsamkeit auf: Die Summe der Eckzahlen lautet bei der vorliegenden Aufgabenstellung immer 15. Diese Entdeckung lässt sich mathematisch erklären und durch eine Punktedarstellung veranschaulichen.

11 Die Erfahrungen zeigen, dass nicht alle Schüler in der Lage sind, ein »leeres Zahlendreieck« mit passenden Zahlen zu füllen. In diesem Fall könnten nach einiger Zeit einzelne Zahlen (z. B. zwei Eckzahlen oder eine Eckzahl und Mittelzahl vorgegeben werden.

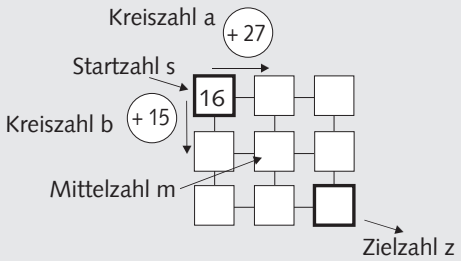
1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45
(Summe aller Punkte im Dreieck) und
20 + 20 + 20 = 60
(Summe der Außenzahlen bzw. Summe der linear angeordneten Punkte)



Somit ergibt sich zwischen der Summe der Außenzahlen und der Summe der Zahlen 1 bis 9 eine Differenz von 15, die auf die Eckzahlen verteilt werden muss.

Beispiel 2: Zahlengitter

Beim Zahlengitter[12] handelt es sich ebenfalls um ein substanzielles Aufgabenformat. Das Rechnen beginnt bei der »Startzahl«. Die restlichen Kästchen werden gefüllt, indem auf waagrechten und auf senkrechten Wegen jeweils eine bestimmte »Kreiszahl« addiert wird. Die »Zielzahl« des Zahlengitters kann auf beliebigen »Gitterwegen« in vier Rechenschritten erreicht werden (z. B. zweimal waagrecht und zweimal senkrecht oder einmal waagrecht, zweimal senkrecht und einmal waagrecht). Das Kommutativgesetz ($a + b = b + a$), Assoziativgesetz ($(a + b) + c = a + (b + c)$) und Distributivgesetz (hier: $2 \cdot (a + b) = 2 \cdot a + 2 \cdot b)$) bezüglich der Addition kommt zum Tragen.

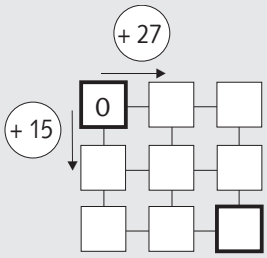


Gesetzmäßigkeiten, die dem Zahlengitter zu Grunde legen, können sowohl bei der Einzelbetrachtung eines Zahlengitters als auch aus dem Vergleich mehrerer Beispiele erkannt werden.

12 Aufgabenvariationen zum Zahlengitter finden Sie bei Selter (2004).

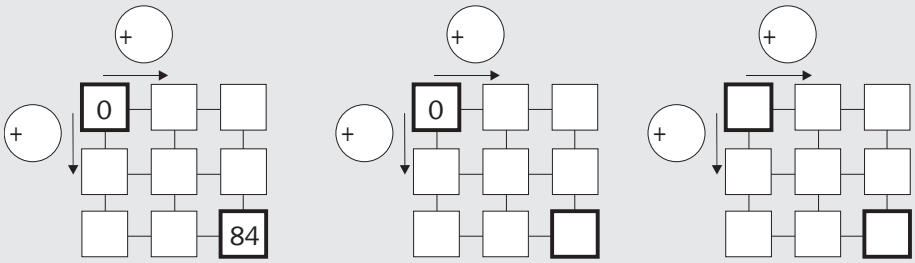
Aufgabe

a) Berechne das Zahlengitter und finde die Zielzahl!



Die Zielzahl lautet:

b) Finde nun noch weitere Zahlengitter mit der gleichen Zielzahl!



c) Was fällt dir auf? Begründe deine Entdeckungen!

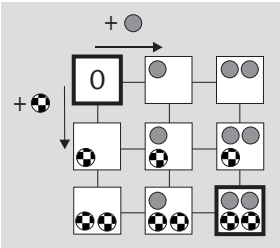
Die Aufforderung, im Anschluss an die Aufgabe verschiedene »Kreiszahlenpaare« (waagreche Kreiszahl / senkrechte Kreiszahl) herauszufinden, die zur Zielzahl 84 führen, veranlasst auf eine spielerische Art und Weise zu einer gründlichen Erforschung der »Bauweise« des Zahlengitters.

Durch systematisches Ausprobieren, Vergleichen von Unterschieden, sowie Entdecken von Gemeinsamkeiten finden die Schülerinnen und Schüler mögliche Kombinationen von Kreiszahlen. Durch das freie Forschen gelingt es ihnen, in Abhängigkeit ihres individuellen Leistungsvermögens nach wenigen oder erst nach vielen Beispielen, mathematische Phänomene zu entdecken und zu beschreiben (Baustein 1 und 2):

- Die Mittelzahlen lauten jedes Mal 42.
- Die Mittelzahl ist die Hälfte der Zielzahl.
- Die Summen der Kreiszahlen sind gleich.
- Wenn ich eine Kreiszahl um 1 (2, 3, …) erhöhe, dann muss ich die andere um 1 (2, 3, …) verringern.
- Ich kann die Kreiszahlen vertauschen.

Die Mittelzahl ergibt sich bei der Startzahl Null aus der Summe der Kreiszahlen $a + b$. Da sich die Zielzahl (hier 84) aus $2 \cdot (a + b)$ zusammensetzt, ist die Mittelzahl die Hälfte der Zielzahl (42). Durch das Zerlegen der Mittelzahl 42 in zwei Summanden (Kreiszahlen) werden alle möglichen Kreiszahlenpaare gefunden. Eine weitere Strategie zur Lösungsfindung wäre auch das Ableiten eines weiteren Kreiszahlenpaares aus seinem Tauschpaar (z. B. + 20, + 22 → + 22, + 20) oder ein operatives Variieren der Kreiszahlen (z. B. + 12 + 30 → + 13 + 29).

Als Argumentationshilfe bietet sich eine Veranschaulichung in Form von zwei unterschiedlich farbigen Punkten an. Ein Punkt symbolisiert die Kreiszahl a, der andere die



Kreiszahl b. Die Kinder werden nun aufgefordert, mit den Punkten zu »rechnen« und so das Zahlengitter sukzessive zu füllen. Wichtig ist hierbei die Erkenntnis, dass die Farbpunkte stellvertretend für alle möglichen Beispiele stehen. Stellt man sie sich als Variable a und b vor, so wird deutlich, dass mit Veranschaulichungen dieser Art das Verständnis algebraischer Strukturen bereits in der Grundschule gefördert werden kann. Aus der Darstellung geht die Begründung für die Entdeckung »Die Mittelzahl ist die Hälfte der Zielzahl« eindeutig hervor, da jede Kreiszahl zweimal in der Zielzahl steckt.

Anregung 5
a) Analysieren Sie die vorliegende Forscheraufgabe für eine beliebige Startzahl (nicht Null). Was können Schülerinnen und Schüler nun entdecken und begründen?
b) Welche Argumentationshilfen könnten sich im Unterricht als hilfreich erweisen? Z. B. sprachliche Hilfe: »Wenn s = 0 ist, dann … Wenn s = 1 ist, dann … usw.«

Bei den folgenden Beispielen handelt es sich um *unlösbare Aufgabenstellungen*. Das bekannteste Beispiel für unlösbare Aufgaben sind wohl die so genannten Kapitänsaufgaben: *Auf einem Schiff befinden sich 16 Schafe und 13 Ziegen. Wie alt ist der Kapitän?*
Obwohl diese oder ähnliche Aufgaben aufgrund fehlender Angaben nicht lösbar sind, gaben in Untersuchungen erstaunlicherweise nicht wenige Kinder Lösungen an (Selter u. Spiegel 2004). Die Schülerinnen und Schüler waren es offensichtlich nicht gewohnt, im Mathematikunterricht mit unlösbaren Aufgabenstellungen konfrontiert zu werden. Der gelegentliche Einsatz unlösbarer Aufgaben sensibilisiert nun die Lernenden für einen überlegteren Umgang mit Angaben. Damit die Kinder die Unlösbarkeit einer Aufgabe überhaupt in Betracht ziehen, könnten Fragen wie »Stimmt das wirklich?« oder »Gibt es eine Lösung?« die Möglichkeit der Unlösbarkeit andeuten. So fällt es den Schülerinnen und Schüler u. U. leichter, selbstbewusst eine Unlösbarkeit festzustellen.
Unlösbare Aufgaben können sich förderlich für die Fähigkeit des Argumentierens auswirken (vgl. Scherer 2007). Diese Aufgaben fordern indirekt zur Begründung der Erkenntnisse auf, denn erst nach diesem Schritt ist die Unlösbarkeit unumstößlich nachgewiesen. Weitere Fragen beinhalten ein Argumentationspotential:

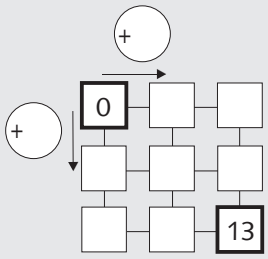
Mögliche Forscherfragen
»Woran liegt es, dass die Aufgabe nicht lösbar ist?«
»Ist die Aufgabe lösbar, wenn ich … verändere?«
»Wie könnte ich die Aufgabe verändern, so dass ich sie lösen kann?«

Scherer empfiehlt, Kinder anfangs mit sehr offensichtlich nicht lösbaren Aufgaben zu konfrontieren (2007): *Wenn ich zwei ungerade Zahlen zusammenzähle, erhalte ich das Ergebnis 7. Findest du eine Lösung?*

Beispiel 3: Unlösbares Zahlengitter

Einige substanzielle Aufgaben, z. B. Rechendreieck und Zahlengitter, lassen sich so verändern, dass sie unlösbar werden. Es folgt ein Beispiel für das Zahlengitter:

Aufgabe
Gibt es das Zahlengitter mit der Startzahl 0 und der Zielzahl 13? Begründe!



Hier sind Beispiele von zwei Kinderlösungen, die unterschiedliche Argumentationen enthalten:

Laura
Es geht nicht, weil es eine ungerade Zahl ist. Ungerade + ungerade ergibt gerade, und auch gerade + gerade ergibt ein gerades Ergebnis.

Fabian
Ja, das geht, aber nur, wenn ich eine halbe Zahl – z. B. 6,5 – in die Mitte schreibe.

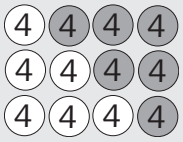
Aufgrund der Zusammensetzung der Zielzahl aus dem Doppelten der Mittelzahl, muss die Frage (mit Ausnahme einer »Kommazahl«) verneint werden, da die Zielzahl ungerade ist (vgl. Punktemuster). Als mögliche Fortführung im Unterricht wäre die Erfindung weiterer unlösbarer oder auch lösbarer Zahlengitter denkbar.

Beispiel 4: Unlösbare Rechengeschichte

Aufgabe
Im Zoo sieht Florian Eisbären und Braunbären. Florian zählt die Beine zusammen. Zusammen besitzen die Tiere 16 Beine.
Es gibt doppelt so viele Eisbären wie Braunbären. Hat Florian sich verzählt?

Um die Forscherfrage zu lösen, bieten sich verschiedene Strategien an. Sinnvoll wäre es, zunächst die Anzahl der Tiere (16 : 4 = 4) zu berechnen. Da die Anzahl von 4 Tieren sich nicht in 3 gleich große Gruppen aufteilen lässt, entspricht der vorliegende Fall nicht der Realität. Um die Unlösbarkeit der Aufgabe zu erkennen bzw. zu begründen, bietet sich weiterhin eine systematische Vorgehensweise zum Auffinden aller möglichen Kombinationen von Tieren an.

Eisbären	Braunbären
1	3
2	2
3	1



Aus der Tabelle und der Punktedarstellung ist ersichtlich, dass keine mögliche Lösung zu der Bedingung »doppelt so viele Eisbären« existiert. Es handelt sich also um eine fehlerhafte Aussage.

Anregung 6
Sammeln Sie weitere unlösbare Aufgabenstellungen.

6 Beurteilung von Argumentationen

Um der Bedeutung des Argumentierens im Mathematikunterricht gerecht zu werden, dürfen nicht nur Anstrengungen unternommen werden, argumentative Kompetenzen gezielt zu entwickeln, sondern (langfristig gesehen) müssen diese Kompetenzen auch in die Leistungsmessung einfließen. Hierzu müssen noch vielfältige Beurteilungsinstrumente für das mündliche (z. B. Präsentationen) und schriftliche Argumentieren diskutiert und erforscht werden.
Das folgende Beurteilungsmodell stellt Kriterien zur Beurteilung vor. Aufgrund der Offenheit soll gewährleistet sein, dass es sich für möglichst viele Aufgaben eignet bzw. Anhaltspunkte für aufgabenspezifische Kriterien gibt.
Die Argumentationen, die die Kriterien verdeutlichen sollen, beziehen sich auf die Forscherfrage zum Zahlengitter in Kapitel 5 (siehe Beispiel 2). Es leuchtet sicherlich ein, dass bei der Beurteilung von Argumentationskompetenzen subjektive Einschätzungen nicht ausgeschlossen werden können.

Entdeckungen einfacher Zahleigenschaften oder -beziehungen	Lisa Die Mittelzahl ist immer gleich (42) und auch die Zielzahl, weil … weiß ich nicht.	Julian Hier sind es die gleichen Startzahlen, Mittelzahlen und Zielzahlen. Man muss die Zielzahl halbieren.
Entdeckungen einfacher und leicht komplexer Zahlbeziehungen mit Begründung	Anna Ich habe herausgefunden, dass die Mittelzahlen alle 42 sind, und das Ergebnis liegt an den Startzahlen und Kreiszahlen.	Kilian Wenn man die Kreiszahlen zusammenrechnet, ergeben sie immer 42, und deswegen kommt auch immer die 84 als Zielzahl raus. Die Zielzahl ist das Doppelte der Mittelzahl: 42 + 42 = 84.
Entdeckung komplexer Zahlbeziehungen mit Begründung	Laura Ich habe herausgefunden, dass die Mittelzahlen bei der gleichen Zielzahl immer gleich sind, und das liegt an den Startzahlen und an den Kreiszahlen, weil wenn man sie zusammenzählt, ergibt es das Gleiche. Die Mittelzahl ist die Hälfte von der Zielzahl, also 42.	Stefan Bei der Nummer a) und b) ist die Mittelzahl immer gleich. Es gibt mehr Aufgaben mit der Startzahl 0 und Zielzahl 84. Ich muss nur die 42 zerlegen, z. B. 20 und 22 oder 40 und 2. Wenn die Startzahlen, Zielzahlen und die Mittelzahlen gleich sind, sind auch die Kreiszahlen zusammen gleich, hier 42.

Diese Beispiele weisen auf die Anforderungsvielfalt der Forscheraufgabe »Zahlengitter« hin. Je nach individuellem Leistungsvermögen bzw. zugrunde liegenden Kompetenzen konnten die Kinder Anforderungen unterschiedlicher Niveaustufen erfüllen. Natürlich stellt das Begründen hohe Anforderungen an die Kinder. Eine Voraussetzung für die Entwicklung von Begründungsideen stellt das Erkennen einer Begründungsbedürftigkeit dar (vgl. Äußerung von Lisa). Um in dieser Hinsicht Fortschritte zu erzielen, sollte eine Begründung in Abhängigkeit des individuellen Leistungsvermögens bei einfachsten bis komplexen Sachverhalten immer wieder eingefordert werden. Eine

Pädagogik der »Anerkennung der Teilleistungen« verlangt jedoch auch die Würdigung einer Entdeckung, wenn die Begründung (noch) fehlt.

Anregung 7

a) Sammeln Sie in Ihrem Unterricht zum Zahlengitter oder zu anderen »Guten Aufgaben« Schülerargumentationen.
b) Beurteilen Sie diese Argumentationen. Modifizieren Sie gegebenenfalls die vorgestellten Beurteilungskriterien.
c) Diskutieren Sie über mögliche Probleme bei einer Leistungsbeurteilung.

Literaturverzeichnis

Bardy, P. (2007): *Mathematisch begabte Grundschulkinder. Diagnostik und Förderung.* München: Spektrum.

Bezold, A. (2008): *Entwicklung von Argumentationskompetenzen im Mathematikunterricht. Beweisen – argumentieren – begründen.* In: Grundschulmagazin, Heft 6 (2008), S. 35-40.

Bezold, A. (2009): *Förderung von Argumentationskompetenzen durch selbstdifferenzierende Lernangebote – ein Studie im Mathematikunterricht der Grundschule.* Hamburg: Verlag Dr. Kovač.

Blum, W.; Drüke-Noe, C.; Hartung, R.; Köller, O. (Hrsg.) (2006): *Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsidee.* Berlin: Cornelsen.

Devlin, K. (1998): *Muster der Mathematik. Ordnungsgesetze des Geistes und der Natur.* Heidelberg, Berlin: Spektrum.

Freudenthal, H. (1973): *Mathematik als pädagogische Aufgabe.* Band 1 und 2. Stuttgart: Klett.

Gallin, P.; Ruf, U. (1998): *Sprache und Mathematik in der Schule. Auf eigenen Wegen zur Fachkompetenz.* Seelze, Leipzig: Kallmeyer.

Hengartner, E.; Hirt, U.; Wälti, B. und Primarschulteam Lupsingen (2006): *Lernumgebungen für Rechenschwache bis Hochbegabte. Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht.* Zug: Klett und Balmer Verlag.

KMK (2005): *Beschlüsse der Kultusministerkonferenz: Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich.* Beschluss vom 15.10.2004. München, Neuwied: Luchterhand.

Krauthausen, G. (2001): *»Wann fängt das Beweisen an? Jedenfalls, ehe es einen Namen hat«.* In: Weiser, W.; Wollring, B.: *Beiträge zur Didaktik der Mathematik für die Primarstufe.* Festschrift für Siegbert Schmidt. Hamburg: Verlag Dr. Kovač. S. 99-113.

Krummheuer, G.; Fetzer, M. (2005): *Der Alltag im Mathematikunterricht. Beobachten Verstehen Gestalten.* München: Spektrum.

Malle, G. (2002): *Begründen. Eine vernachlässigte Tätigkeit im Mathematikunterricht.* In: mathematik lehren, Heft 110 (2002), S. 4-8.

Meyer, M. (2007): *Entdecken und Begründen im Mathematikunterricht. Von der Abduktion zum Argument.* Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Müller, G. N.;Steinbring, H.; Wittmann, E. C. (Hrsg.) (2004): *Arithmetik als Prozess.* Seelze: Kallmeyer.

Ruwisch, S.; Peter-Koop, A. (Hrsg.) (2003): *Gute Aufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule.* Offenburg: Mildenberger Verlag.

Scherer, P. (2007): *»Unschaffbar«. Unlösbare Aufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule.* In: Grundschulunterricht, Heft 2 (2007), S. 20-23.

Selter, C. (2004): *Mehr als Kenntnisse und Fertigkeiten. Erforschen, Entdecken und Erklären im Mathematikunterricht der Grundschule. Moduls G 2 Mathematik.* Kiel: IPN-Projektmaterialien.

Selter, C.; Spiegel, H. (2004): *Kinder & Mathematik. Was Erwachsene wissen sollen.* Seelze-Velber: Kallmeyer.

Steinweg, A. S. (2001): *Zur Entwicklung des Zahlenmusterverständnisses bei Kindern. Epistemologisch-pädagogische Grundlegung.* Münster: LIT VERLAG.

Sundermann, B.; Selter, C. (2006): B*eurteilen und Fördern im Mathematikunterricht. Gute Aufgaben. Differenzierte Arbeiten. Ermutigende Rückmeldungen.* Berlin: Cornelsen.

Verboom, L. (2004): *Entdeckend üben will gelernt sein!* In: Die Grundschulzeitschrift, Heft 177 (2004), S. 6-11.

Walther, G. (2004): *Gute und andere Aufgaben. Moduls G 1 Mathematik.* Kiel: IPN-Projektmaterialien.

Walther, G.; van Heuvel-Panhuizen, M.; Granzer, D.; Köller, O. (Hrsg.) (2007): *Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret.* Berlin: Cornelsen.

Wittmann, E. C.; Müller, G.: *Wann ist ein Beweis ein Beweis?* In: Bender, P. (Hrsg.) (1988): *Mathematikdidaktik: Theorie und Praxis.* Festschrift für Heinrich Winter. Berlin: Cornelsen. S. 237-257.

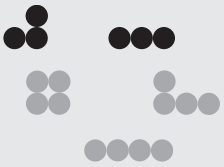
Anhang

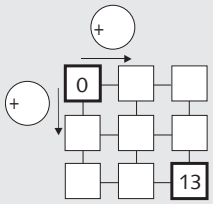
1 Argumentationsanlässe

Entdeckungen können aus Erfahrungen heraus entstehen. Dabei können Verbindungen zu bereits erlernten Inhalten hergestellt oder neue Strukturen erkannt werden. Unentbehrliche Elemente für das Entdecken von mathematischen Besonderheiten sind Kreativität, Intuition und Phantasie. Auch durch ein Gefühl für Ästhetik und einen Sinn für Ordnung keimen erste Ideen, die im Idealfall zur Erkenntnisgewinnung führen (vgl. Steinweg 2001, S. 20).

Die folgende Übersicht zeigt, dass es täglich im Mathematikunterricht »große oder kleine« Anlässe für das Argumentieren gibt. Sie können sowohl eigene Beispiele sammeln (rechte Spalte), als auch weitere Kategorien von Argumentationsanlässen (freie Zeilen unten) ergänzen.

Argumentations-anlässe	mögliche Fragen bzw. Aufträge	Beispiel	weitere Beispiele
elementare arithmetische Aussagen	Wenn du eine gerade und eine ungerade Zahl zusammenzählst, erhältst du eine ungerade Zahl. »Stimmt das? Begründe!«	4 + 5 = 9 5 + 6 = 11	
Rechenwege / vorteilhaftes Rechnen	»Warum hast du das so gerechnet?« »Was fällt dir auf?« »Geht das auch noch anders?«	6 + 5 = 11 6 + 6 – 1 = 11 5 + 5+ 1 = 11	
Rechengesetze	»Wer hat Recht?« »Gilt das immer?« »Warum ist das so?«	Marie: 3 + 5 = 8 Paul: 5 + 3 = 8 (Kommutativgesetz)	

Argumentations-anlässe	mögliche Fragen bzw. Aufträge	Beispiel	weitere Beispiele
Beziehungen von Operationen	»Was passiert, wenn ich die erste Zahl verdopple (halbiere…)?« »Warum ist das so?«	24 · 3 = 24 · 6 : 2 = 16 : 2 = 16 : 4 =	
Aufgabenpäckchen	»Setze die Reihe fort!« »Was fällt dir auf?« »Warum ist das so?« »Erfinde selbst Aufgabenpäckchen und erkläre sie!«	Aufgabenpäckchen 2 + 5 = 2 + 6 = 2 + 7 =	
Zahlbeziehungen in Aufgabenformaten / substanzielle Aufgabenformate	»Fülle die Rechentabelle möglichst geschickt aus!« »Erkläre deinen Weg!« »Warum hast du diesen Weg gewählt?«	<table><tr><td></td><td>2</td><td>3</td><td>6</td></tr><tr><td>2</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>3</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>6</td><td></td><td></td><td></td></tr></table>	
geometrische Muster	»Finde weitere Drillinge (Vierlinge)!« »Wie bist du vorgegangen?« »Hast du alle gefunden?« »Warum gibt es nicht mehr?«	Drillinge und Vierlinge 	
Beziehungen arithmetischer und geometrischer Muster	»Setze das Muster fort!« »Welche Muster (Eigenschaften, Strukturen) erkennst du?« »Stimmt das immer?« »Warum ist das so? » Verwandle das Muster!«	Mustereigenschaften bei Doppeltreppen 1 4 9	

Argumentations-anlässe	mögliche Fragen bzw. Aufträge	Beispiel	weitere Beispiele
unlösbare Probleme und Spezialfälle	»Findest du eine / keine Lösung?« »Warum ist das so?« »Stimmt das wirklich?«		

Programmträger: IPN, Kiel
Projektleitung: Prof. Dr. Olaf Köller
www.ipn.uni-kiel.de

SINUS an Grundschulen
Projektkoordination am IPN: Dr. Claudia Fischer
Tel. +49(0)431/880-3136
cfischer@ipn.uni-kiel.de
www.sinus-an-grundschulen.de

Ministerium
für Bildung und Kultur
des Landes Schleswig-Holstein

Programmkoordination für die Länder durch das
Ministerium für Bildung und Kultur
des Landes Schleswig-Holstein (MBK)
Dr. Kai Niemann
www.schleswig-holstein.de/MBK/DE/MBK_node.html

Serverbetreuung: Deutsches Institut für Internationale
Pädagogische Forschung (DIPF)
www.dipf.de

ISBN für diese Handreichung
978-3-89088-204-8

Partner des Programms *SINUS an Grundschulen*